

Comment fuir le long d'une droite?*

Laure Dumaz†

Prisme N°31

Novembre 2015

* Ce texte est inspiré de la présentation de l'auteure dans le cadre du séminaire Cournot, « Où va une marche aléatoire ? » en février 2015. La vidéo du séminaire est disponible sur le site du Centre Cournot : www.centre-cournot.org.

†Laure Dumaz est chargée de recherche au CNRS dans le laboratoire du Ceremade de l'Université Paris-Dauphine. Son domaine de recherche est la théorie des probabilités, elle s'intéresse aux modèles issus de la physique statistique, dont les comportements sont non gaussiens. Ancienne élève de l'École normale supérieure, elle a travaillé à l'Université de Budapest, l'Université de Toronto et l'Université Paris-Sud pendant sa thèse, ainsi qu'à l'Université de Cambridge en postdoctorat.

Résumé

Ce texte porte sur la trajectoire d'une marche aléatoire particulière, celle, par exemple, d'un fuyard qui tente d'échapper à ses poursuivants mais ne peut se déplacer que sur la droite réelle. Quelle est la trajectoire continue sur la droite qui laisse le moins d'information possible derrière soi ? Cette question est abordée dans le cadre de la théorie des marches aléatoires. Différents types de marches sont présentés, à commencer par le célèbre mouvement brownien. La limite d'échelle de la marche aléatoire auto-répulsive est ensuite exposée, avant que ne soit détaillé le processus auto-répulsif, qui constitue une stratégie optimale.

Introduction

Ce texte porte sur la trajectoire d'une marche aléatoire particulière, celle, par exemple, d'un voleur qui tente d'échapper aux forces de l'ordre, mais ne peut se déplacer que sur la droite réelle. La fuite a donc lieu dans un monde unidimensionnel. Les poursuivants possèdent comme information le nombre de fois que ce voleur a visité chaque endroit (grâce, par exemple, à ses factures d'hôtel et au repérage des lieux qu'il a cambriolés) mais pas les dates précises. Quelle est la trajectoire continue sur la droite, telle que le voleur laisse le moins d'information possible derrière lui ?

Cette question peut être posée en théorie des jeux, mais ce texte repose sur la théorie des marches aléatoires et, en particulier, celles des marches dites auto-répulsives. Je présente d'abord différents types de marches aléatoires, avant de me concentrer sur la limite d'échelle de la marche aléatoire auto-répulsive, appelée « vrai processus auto-répulsif », qui est l'analogue du mouvement brownien pour la marche aléatoire simple. Dans une troisième partie, je reviens sur la stratégie d'un voleur astucieux : comment peut-il rendre sa fuite plus sûre ?

1. Marche aléatoire

a. Définition

La marche aléatoire est l'un des objets les plus étudiés en théorie des probabilités. C'est un objet très simple. Comment est-elle définie ?

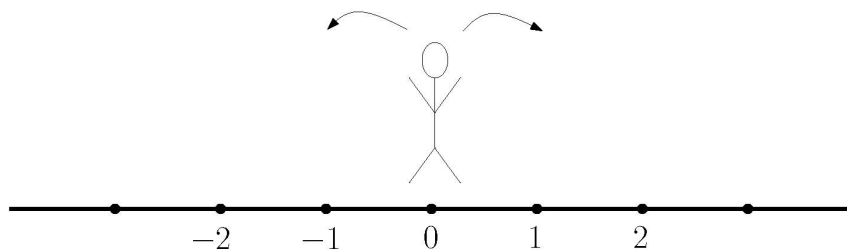


Figure 1 : Un marcheur aléatoire sur son point de départ.

Ici, le marcheur part de zéro et se déplace sur les entiers en dimension 1. Toute autre condition initiale peut être choisie et la discussion peut être généralisée aux dimensions supérieures sans difficulté.

La marche aléatoire est construite par récurrence. Notons $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ les positions successives de la marche. Posons $S_0 = 0$. Une fois définie la marche jusqu'au temps n , le marcheur se déplace au temps $n + 1$ selon la loi suivante : il ne peut sauter que sur ses plus proches voisins et sa position au temps $n + 1$ s'écrit :

$$S_{n+1} = S_n + \varepsilon_n \text{ où } \varepsilon_n = \pm 1.$$

Le déplacement ε_n est aléatoire et dépend éventuellement de tout le passé, c'est-à-dire de toutes les positions visitées avant l'instant n (tous les $(S_k)_{k \leq n}$).

Une marche aléatoire modélise de nombreux objets : par exemple un prix évoluant au cours du temps ou la position d'une particule dans un fluide en dimension 3. Dans le cas où l'incrément ε_n ne dépend que de S_n , et non de toutes les positions avant l'instant n , on dit que la marche est markovienne. Sous cette hypothèse, de nombreux outils probabilistes sont disponibles pour analyser la marche, mais c'est une hypothèse très restrictive : *a priori* ε_n dépend vraiment de tout le passé et pas seulement de la position à l'instant présent.

b. Marche aléatoire simple et mouvement brownien

L'exemple le plus élémentaire de marche aléatoire markovienne est celui de la marche aléatoire simple : on tire à pile ou face pour choisir une direction à chaque fois indépendamment, i.e. $\varepsilon_n = 1$ avec probabilité $1/2$ et $\varepsilon_n = -1$ avec probabilité $1/2$ pour tous les temps n . Ainsi, la direction choisie ne dépend pas de la position à l'instant n ni de son passé.

La première question naturelle est celle de l'ordre de grandeur de S_n lorsque n est très grand. Le théorème central limite nous apporte la réponse : $S_n \approx \sqrt{n}$. C'est donc très différent d'un marcheur qui choisit, par exemple, d'aller toujours sur sa droite pour lequel $S_n = n$, ou un marcheur qui oscille toujours entre 0 et 1 et dont le déplacement est d'ordre 1. Ici, on se trouve un peu entre les deux.

Est-il possible d'affiner ce résultat, c'est-à-dire de regarder non pas simplement la position à l'instant n , mais de prendre la limite d'échelle de toute la trajectoire de cette marche ?

Examinons tout d'abord ce qu'il se passe sur des dessins :

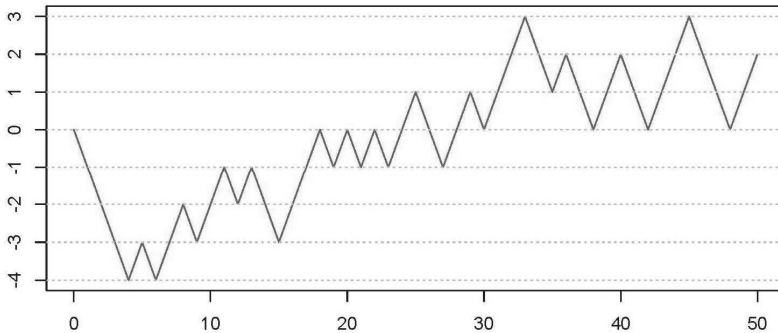


Figure 2 : Simulation de la marche aléatoire simple, la trajectoire $n \mapsto S_n$

La figure ci-dessus représente une simulation de la marche aléatoire simple pour 50 pas. En abscisse se trouve le temps, et en ordonnée, la position de la marche. Il faut imaginer que la marche se déplace sur l'axe des ordonnées. Pour un grand nombre de pas (10 000 pas), le dessin ressemble à ceci :

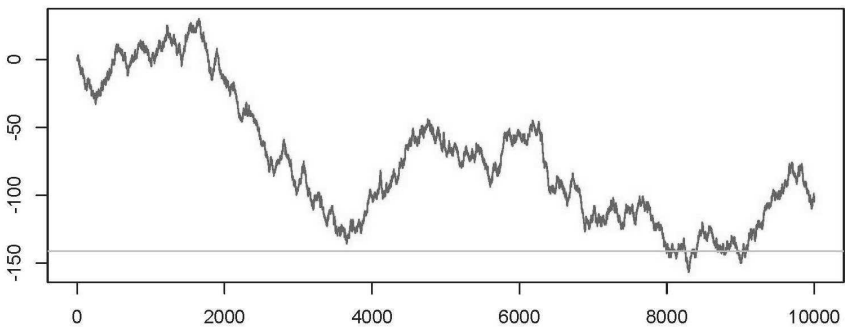


Figure 3 : Simulation de la marche aléatoire simple, la trajectoire $n \mapsto S_n$

Quelque chose de très erratique apparaît. L'échelle est choisie de manière à obtenir un objet non trivial : en abscisse, il y a 10 000 pas, et l'axe des ordonnées parcourt l'intervalle $[-150, 50]$ environ.

Si nous avons choisi une échelle 10 000 / 10 000, nous aurions donc vu approximativement une droite (les fluctuations entre 50 et 150 ne se verraient presque pas). Le choix d'échelle est donc très important.

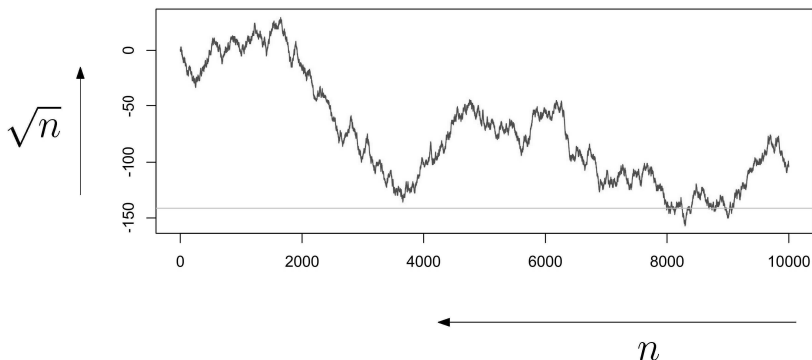


Figure 4 : Le rééchelonnement d'une marche aléatoire simple

Comme dans la figure ci-dessus, on prend un nombre de pas n de plus en plus grand, en réajustant l'échelle de la marche par \sqrt{n} . C'est le bon ordre de grandeur, puisque lorsque $t = 1$, on retrouve $S_{[nt]}/\sqrt{n}$, autour de la grandeur 1. Dans la figure, cela consiste à diviser l'axe des abscisses par n et celui des ordonnées par \sqrt{n} , lorsque n grandit. Y-a-t-il une convergence vers une limite quand n tend vers l'infini ? La réponse est oui : la fonction aléatoire $t \mapsto S_{[nt]}/\sqrt{n}$ converge vers le mouvement brownien, une courbe aléatoire fractale continue. C'est la courbe aléatoire la plus naturelle qui soit, parce qu'elle correspond à un choix uniforme parmi toutes les courbes continues possibles. Si l'on dessine spontanément une fonction aléatoire continue dans le plan, le résultat devrait ressembler à cela :

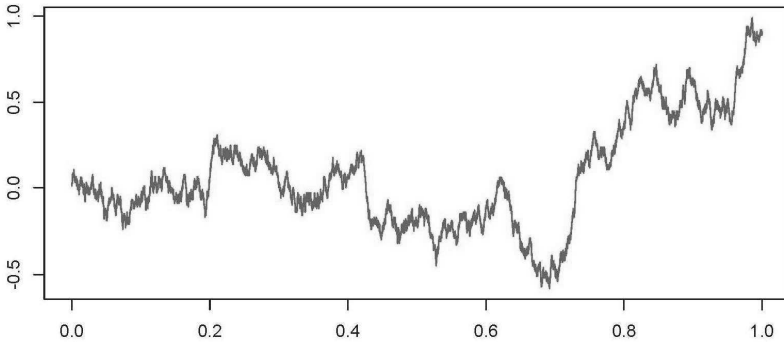


Figure 5 : Le mouvement brownien

C'est une courbe fractale : si l'on agrandit quelque part, on obtient la même courbe (en loi).

Quel est l'intérêt de cette limite d'échelle ? La marche aléatoire est très simple à définir. On pourrait très bien envisager de l'étudier lorsque n est très grand sans faire référence au mouvement brownien, qui semble être un objet plus compliqué à manipuler au premier abord. Paradoxalement, le mouvement brownien a des propriétés beaucoup plus simples que la marche aléatoire. En particulier, il possède la propriété de changement d'échelle : pour tout $a \in \mathbb{R}$, $t \mapsto B_{at}$ suit la même loi que $t \mapsto \sqrt{a}B_t$, c'est-à-dire que si l'on resserre le mouvement brownien par un facteur a en abscisse, c'est la même chose (en loi) que d'agrandir l'axe des ordonnées par \sqrt{a} , comme dans la figure ci-dessous.

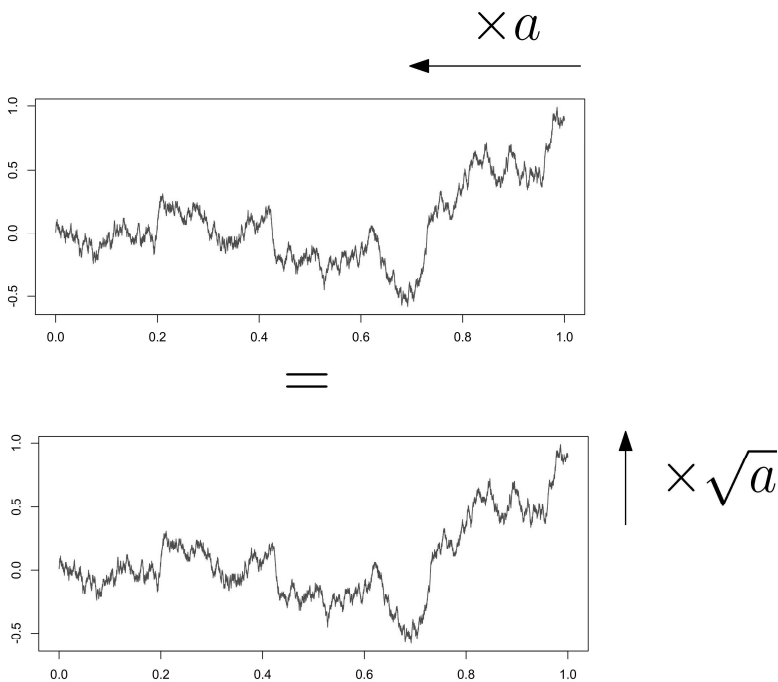


Figure 6 : Changement d'échelle

La propriété de changement d'échelle est très utile pour les calculs et elle n'est pas vérifiée dans le cas d'une marche aléatoire simple.

Une autre raison d'étudier le mouvement brownien plutôt que la marche aléatoire simple, c'est qu'il est universel. Il correspond à la limite d'échelle d'un grand nombre de marches aléatoires, et pas seulement de la marche aléatoire simple. Le mouvement brownien donne donc des informations sur de nombreux modèles discrets.

De façon plus générale, les probabilistes aiment travailler sur les limites d'échelle parce que cela permet d'utiliser le calcul stochastique pour calculer divers exposants. Cette approche a eu énormément de succès ces derniers temps. En particulier, deux attributions récentes de médailles Fields (pour les mathématiciens Wendelin Werner et Stanislav Smirnov) sont dues à des résultats obtenus sur les

limites d'échelle d'interfaces issues de la physique statistique. Le mouvement brownien est un outil crucial pour comprendre ces interfaces très complexes.

2. Marche aléatoire auto-réulsive

a. Définition

Que se passe-t-il lorsque les marches aléatoires sont plus compliquées, comme dans le cas qui m'intéresse, c'est-à-dire celui de la marche aléatoire « auto-réulsive » ? Nous allons considérer ici un marcheur qui préfère passer par les arêtes les moins visitées dans le passé. Contrairement à la marche aléatoire simple, il s'agit d'une marche non markovienne.

Pour construire cette marche, nous devons définir le temps passé sur les arêtes. Soit (X_n) une marche aléatoire sur les entiers. Pour tout temps $n \in \mathbb{N}$, toute arête $e = \{x, x + 1\} (x \in \mathbb{Z})$, définissons

$$l(n, e) := \#\{k \in \{0, \dots, n - 1\}, \{X_k, X_{k+1}\} = e\},$$

qui nous indique combien de fois la marche a traversé l'arête e (de gauche à droite ou de droite à gauche) avant l'instant n .

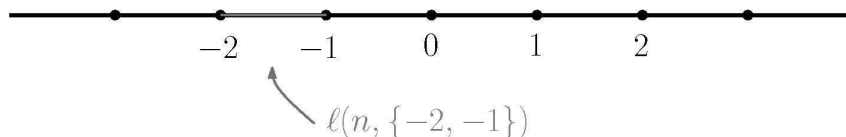


Figure 7 : Une arête $e = \{-2, -1\}$ et la fonction $l(n, e)$.

La marche (X_n) préfère toujours se tourner vers les endroits nouveaux ; elle évite autant que possible les lieux déjà visités, comme par exemple un touriste qui se promène sur la droite réelle et qui préfère découvrir des endroits inédits. Il s'agit cependant d'une simple préférence. Parfois, la marche revient à un endroit déjà beaucoup visité.

Comment est définie la marche auto-réulsive ? Si au temps n , la marche est à une position X_n , on note l_n^+ le temps passé sur l'arête juste à droite de X_n et l_n^- celui passé sur l'arête juste à gauche.

Temps n

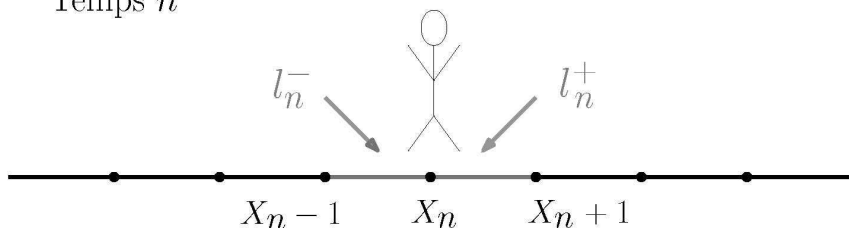


Figure 8 : Le marcheur auto-répulsif au temps n

La probabilité de partir à droite est exponentiellement décroissante en fonction de la différence entre le temps passé sur sa droite et celui sur sa gauche :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = X_n + 1) &= 1 - \mathbb{P}(X_{n+1} = X_n - 1) \\ &\propto \exp(-\beta(l_n^+ - l_n^-))\end{aligned}$$

où le paramètre β est un réel positif fixé.

Ainsi, plus le temps passé à droite par rapport au temps passé à gauche est grand, c'est-à-dire plus la différence $l_n^+ - l_n^-$ est grand et moindres sont les chances de retourner à droite. Et de même pour l'autre côté.

On peut maintenant se poser les mêmes questions que pour la marche aléatoire simple : quel est l'ordre de grandeur de X_n lorsque n est très grand ? La question n'est pas triviale : le comportement reste-il le même que pour la marche aléatoire simple ? Existe-t-il une limite d'échelle de $t \mapsto X_{[nt]}$ correctement renormalisé ? Y a-t-il alors convergence vers le mouvement brownien ou vers un autre processus ?

b. Un modèle concurrent : les polymères

Avant de répondre à ces questions, dressons un bref historique sur les marches aléatoires auto-répulsives. La marche auto-répulsive a été introduite par les physiciens Daniel Amit, Giorgio Parisi et Luca Peliti en 1983¹, comme une approche originale pour modéliser des polymères. Pour les définir, au lieu de choisir chaque

¹ Amit, D.J., G. Parisi, et L. Peliti (1983), « Asymptotic Behavior of the 'True' Self-Avoiding Walk », *Physical Review B*, 27(3), pp. 1635-45.

pas un à un par récurrence comme pour une marche aléatoire, la trajectoire entière est choisie d'un seul coup : $\overline{X}_n = (X_1, \dots, X_n)$.

Un modèle de polymère peut alors se présenter comme ceci :

$$\mathbb{P}(\overline{X}_n = (x_1, \dots, x_n)) \propto \exp\left(-\frac{1}{T}H(x_1, \dots, x_n)\right)$$

H = énergie. T = température.

Ainsi, la probabilité de choisir une certaine trajectoire, notée (x_1, \dots, x_n) , est proportionnelle à $\exp -\frac{1}{T}$, où T est la température du système, multiplié par l'énergie du chemin dont on veut mesurer la probabilité. Il est possible de choisir n'importe quelle fonction d'énergie, et les configurations qui en demandent peu sont préférées. Si la température est très grande, il y a beaucoup de désordre et l'énergie ne joue pas un très grand rôle. Si au contraire la température est très petite, l'énergie devient prépondérante.

Un modèle de polymère possible est un modèle de trajectoires « faiblement » auto-évitantes, où l'énergie est égale au nombre d'auto-intersections du chemin. Pour connaître la probabilité d'une certaine trajectoire, il faut regarder le nombre d'auto-intersections. Plus ce nombre est grand, plus l'énergie est grande, et moins le chemin est choisi. La tendance est donc celle d'un chemin qui s'auto-intersecte peu.

La limite de faible température, lorsque $T \rightarrow 0$, est le modèle dit de marche (strictement) auto-évitante² où il ne peut plus y avoir aucune auto-intersection. On choisit de façon aléatoire uniforme entre les trajectoires qui ne s'auto-intersectent pas car une auto-intersection coûte trop cher — elle fait augmenter « infiniment » l'énergie. Le modèle de polymère auto-évitant est sans intérêt en dimension 1, parce que le marcheur choisit d'aller à droite ou à gauche pour son premier pas, et puis continue toujours dans la même direction pour ne pas croiser sa trajectoire passée. En dimension supérieure, le modèle devient bien plus intéressant et il est très étudié !

Si de « vraies marches » aléatoires, définies de façon récursive, donnent des familles compatibles de lois au cours du temps (on ajoute chaque pas un à un), les marches auto-évitantes, ne constituent pas de telles familles. Lorsque le polymère

² Même si ce n'est pas une marche aléatoire comme définie ci-dessous !

auto-évitant est dessiné jusqu'au temps n , il est difficile de savoir comment le continuer pour obtenir le polymère de longueur $n + 1$: il faut tirer à nouveau toute la trajectoire pour cela !

Voici une illustration de polymères en dimension 2 :

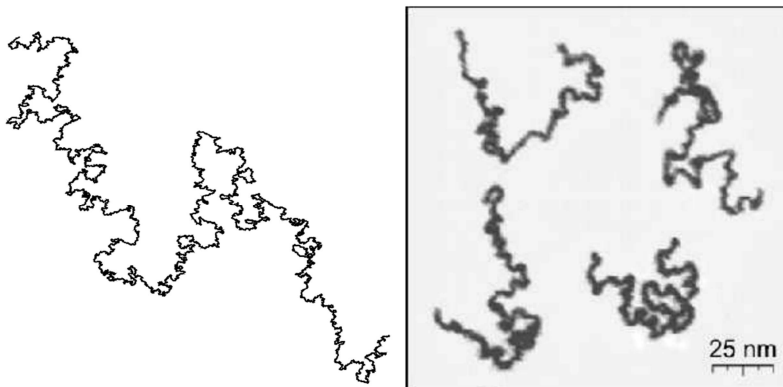


Figure 9 : Polymères en dimension 2 : marche auto-évitante et apparence de chaînes de polymères linéaires réelles.

A gauche, c'est le modèle de polymère auto-évitant, choisi de façon uniforme, et à droite, ce sont des chaînes de polymères observées en laboratoire. On peut remarquer des similarités entre ces deux dessins.

c. Résultats mathématiques sur la marche auto-répulsive

Revenons à présent aux marches auto-répulsives et à la dimension 1. Le premier résultat mathématique rigoureux est obtenu par le probabiliste Bálint Tóth en 1995³. Il montre que l'ordre de grandeur du déplacement du marcheur à un temps n grand est $X_n \approx n^{2/3}$. C'est donc plus grand que \sqrt{n} (on dit que la marche est super-diffusive), mais ce n'est pas non plus balistique (i.e., d'ordre n). Cet exposant $2/3$ est particulièrement intéressant car il apparaît dans de nombreux modèles issus de la physique.

³ « 'True' Self-Avoiding Walk with Bond Repulsion on \mathbb{Z} : Limit Theorems », *The Annals of Probability*, **23** (1995), pp. 1523-1556.

Comment répondre à la seconde question sur la limite d'échelle de la marche ? Si on renormalise notre marche par $n^{2/3}$, y a-t-il convergence vers une courbe aléatoire et s'agit-il encore du mouvement brownien ?

La convergence a lieu en effet, non vers le mouvement brownien, mais vers ce qu'on appelle le « vrai » processus auto-répulsif. On peut voir sur la figure ci-dessous, une simulation de la marche aléatoire simple (entre les deux droites horizontales $-\sqrt{n}$ et \sqrt{n}) et de la marche aléatoire auto-répulsive (qui se déplace jusqu'à $-1.5 \times n^{2/3}$ environ).

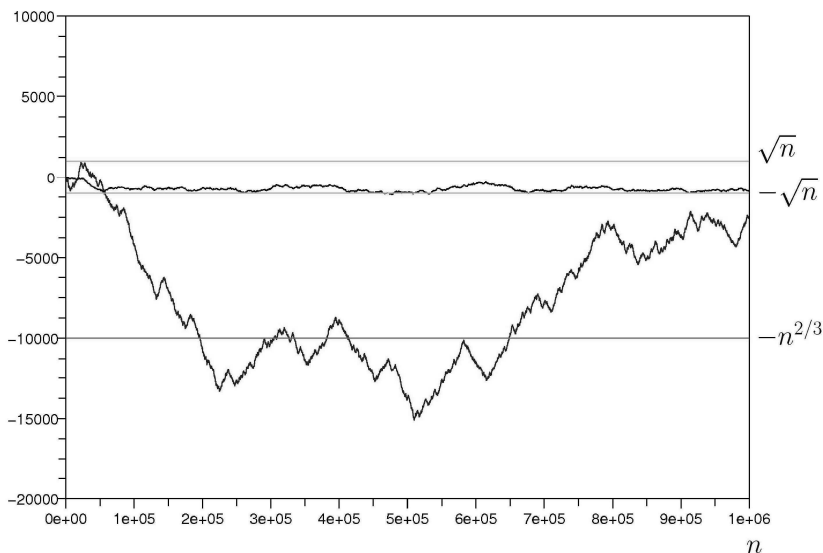


Figure 10 : Comparaison de la marche aléatoire simple et de la marche auto-répulsive

Nous avons pris la bonne échelle pour la marche auto-répulsive, d'ordre de grandeur $n^{2/3}$; ainsi apparaît une courbe non-triviale. Remarquons que la marche aléatoire simple se situe entre $-\sqrt{n}$ et \sqrt{n} , et sur cette échelle, elle fluctue très peu. Elle ressemble à une droite à côté de la marche auto-répulsive.

Cette limite d'échelle a effectivement été prouvée plus tard par Bálint Tóth et Wendelin Werner en 1998⁴. Pour comprendre l'idée de leur preuve, nous allons

⁴ « The True Self-Repelling Motion », *Probability Theory and Related Fields*, 111 (1998), pp. 375-452.

maintenant introduire un autre modèle plus simple de marche aléatoire auto-répulsive.

d. Idée de la preuve de Werner et Tóth : un modèle-jouet

Présentons un modèle-jouet qui permet de comprendre certaines choses, même s'il ne paraît guère intéressant au premier abord. Ce modèle est pourtant crucial, car c'est celui-ci qui donne l'intuition de la construction de la limite de notre marche auto-répulsive.

Tout d'abord, nous allons introduire une initialisation particulière du temps passé sur les arêtes pour notre marche : au lieu de partir d'un temps passé sur les arêtes égal à 0 partout – ce qui est le plus naturel – notre fonction oscille entre 0 et 1 : sur l'arête $\{0,1\}$, on dit qu'à l'instant initial, on a passé un temps 1, et sur l'arête $\{1,2\}$, un temps 0, et puis 1, 0, 1, 0, etc. Et pour l'axe négatif : sur l'arête $\{0,-1\}$, un temps 1, et puis ensuite 0, 1, 0 (voir les figures ci-dessous).

Temps passé sur les arêtes

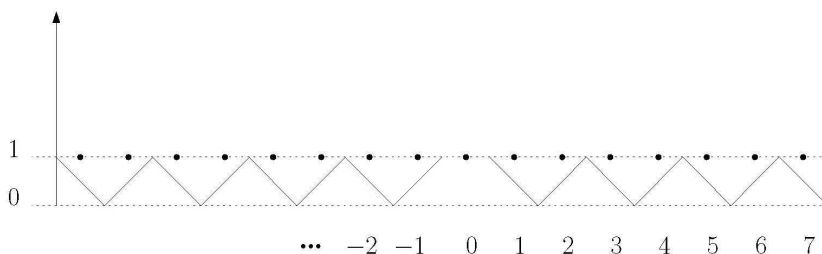


Figure 11 : L'initialisation du temps passé sur les arêtes est la suivante : $l(0, e) = 1$ ou 0 selon l'arête e .

Temps passé sur les arêtes

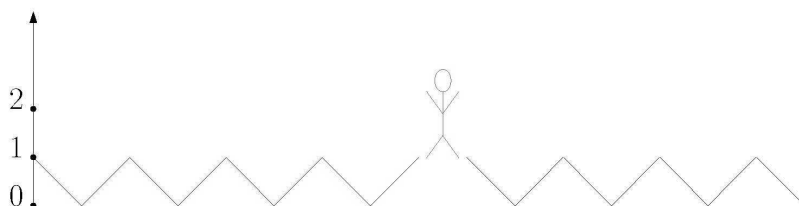


Figure 12 : Réalisation de la marche, phase 1, $t = 0$

La marche commence en $X_0 = 0$. En partant en 0, les règles sont maintenant les suivantes : si la marche est construite jusqu'au temps n , pour le temps $n + 1$, la marche va regarder combien de fois elle est allée sur ses arêtes voisines. Ces deux quantités sont notées l_n^+ et l_n^- comme précédemment pour la marche auto-réulsive classique. Si elles sont égales, c'est-à-dire si $l_n^+ = l_n^-$, il n'y a pas de préférence. On tire simplement à pile ou face pour choisir la destination suivante. Si elles sont différentes, i.e. si $l_n^+ < l_n^-$ ou $l_n^+ > l_n^-$, la marche utilise l'arête la moins visitée de façon déterministe (il n'y a pas d'aléa dans ce cas). Cela donne un modèle de marche aléatoire auto-réulsive très simple : dès que le marcheur a passé moins de temps d'un côté, on va automatiquement préférer l'endroit le moins visité.

Dans la figure ci-dessous, on voit une représentation de ce qui se passe pour les premiers temps :

Temps passé sur les arêtes

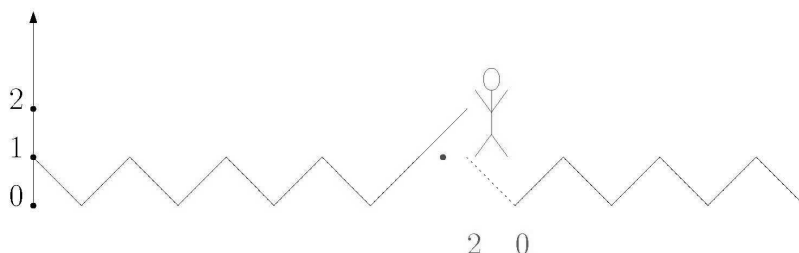


Figure 13 : Réalisation de la marche, phase 2, $t = 1$

A l'instant initial, par construction, on a passé un temps 1 à notre gauche et à notre droite. Ces durées sont égales, donc on tire à pile ou face pour connaître la

direction suivante. Si la pièce indique la droite, au temps $t = 1$, le marcheur a passé un temps 2 sur l'arête $\{0,1\}$ et se retrouve à la position $X_1 = 1$ (voir Figure 12). On compare ensuite les temps passés sur les arêtes $\{0,1\}$ et $\{1,2\}$, qui valent respectivement 2 et 0.

Temps passé sur les arêtes

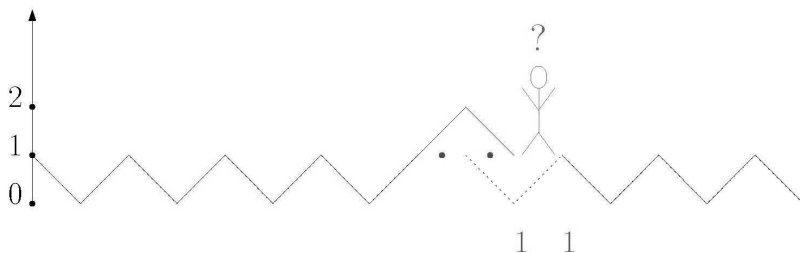


Figure 14 : Réalisation de la marche, phase 3, $t = 2$

De façon déterministe, la marche se dirige vers l'endroit le moins visité, donc elle va ensuite à droite et $X_2 = 2$ (Figure 14). A l'instant $t = 2$, Le temps passé par part et d'autre est égal (il vaut « 1 »), donc on tire à pile ou face pour savoir où aller au temps 3, etc.

Sur les figures, on représente l'évolution du marcheur et le temps qu'il a passé sur chacune des arêtes avant l'instant présent. On associe aussi à la marche une hauteur H_n qui correspond au temps passé sur le point qu'elle visite. Les points indiquent les endroits déjà visités et le bonhomme est placé à l'endroit et à la hauteur où se trouve le marcheur.

Temps passé sur les arêtes

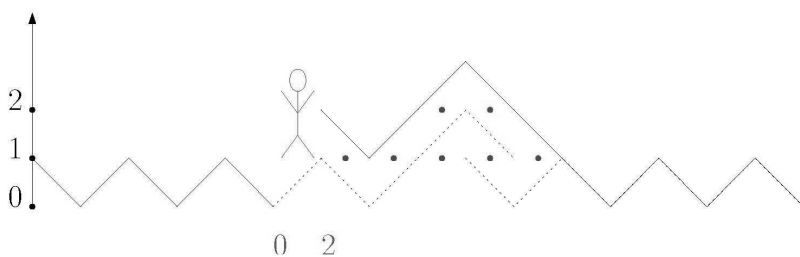


Figure 15 : Réalisation de la marche, phase 4, $t = 7$

Ainsi on obtient un marcheur qui se déplace de façon étonnamment complexe grâce à l'initialisation choisie du temps passé sur les arêtes.

Pourquoi avoir choisi cette initialisation particulière ? Il s'agit d'obtenir une évolution non triviale, et en même temps la configuration la plus plate possible.

Pour comprendre l'évolution à l'instant $n + 1$ à partir de l'instant n , il est intéressant de représenter la marche, mais aussi le temps qu'elle a passé sur chacune des arêtes. Est-ce qu'on tire à pile ou face, ou est-ce qu'on va, de façon déterministe, sur la gauche ou sur la droite ? Pour le savoir, il faut regarder la loi jointe, de la position et du temps passé sur toutes les arêtes : $(X_n, l(n, \cdot))$.

Notons que l'auto-répulsion de ce modèle agit de façon locale : la marche est dite « myope ». Elle ne regarde que les passages sur les arêtes les plus proches.

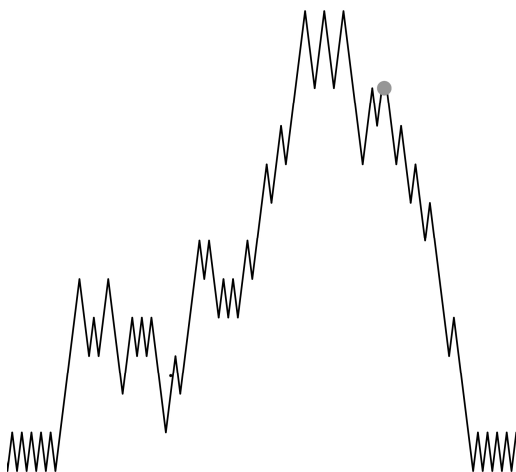


Figure 16 : Le temps passé sur les arêtes au temps $t = 475$ et la position du marcheur à cet instant (gros point).

Par exemple, le graphique ci-dessus représente le temps passé sur les arêtes d'un marcheur auto-répulsif jusqu'au temps $t = 475$. On a l'impression que la marche devrait aller plutôt sur sa droite au temps suivant (elle a passé beaucoup moins de temps sur sa droite que sur sa gauche, où il y a une faille à franchir).

Localement, elle a toutefois passé autant de temps sur sa gauche que sur sa droite. Elle tire donc à pile ou face pour savoir où elle va, et elle a une chance sur deux de partir sur sa gauche. Ce modèle présente donc une auto-répulsion particulière.

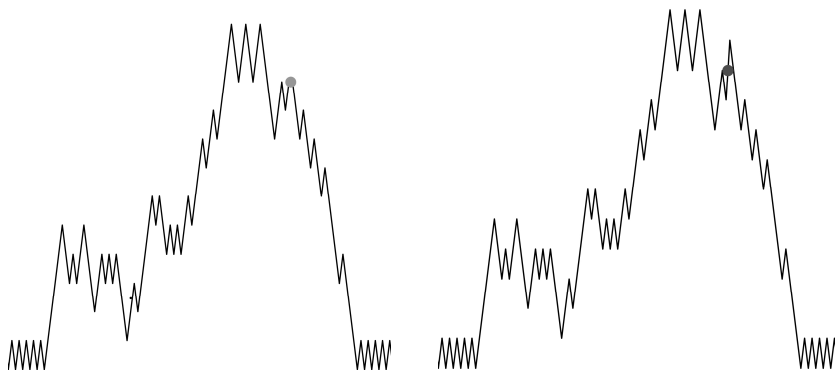


Figure 17 : Le temps passé sur les arêtes aux temps $t = 475$ et $t = 476$ et les positions du marcheur (les points). Notons que le marcheur est parti sur la gauche sur cette illustration.

L'étape suivante consiste à construire un labyrinthe en dimension 2. Nous ajoutons ainsi une dimension à notre problème pour mieux le comprendre !

Partons d'une courbe noire et d'une courbe grise, qui rappellent les conditions initiales pour le temps passé sur les arêtes de notre modèle jouet :



Figure 18 : Construction de la toile discrète, phase 1

On définit ensuite deux réseaux comme sur la figure ci-dessous : il y a des points gris et les points noirs tels que l'union de tous les points donne le réseau

$(\frac{1}{2} + \mathbb{Z}) \times \mathbb{N}$, et la couleur est choisie suivant la parité de la somme de l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.⁵

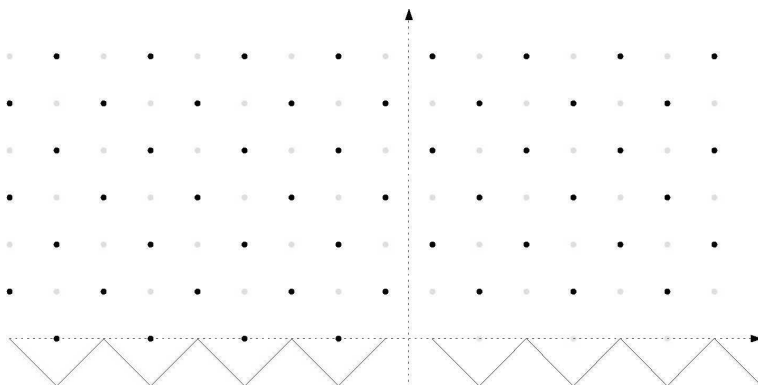


Figure 19 : Construction de la toile discrète, phase 2

De chaque point noir part maintenant une marche aléatoire simple (en dimension 1, l'abscisse représente le temps et l'ordonnée sa position) réfléchi sur la courbe grise, jusqu'à ce qu'elle touche le bord (la condition initiale noire) ; à ce moment là, elle s'arrête :

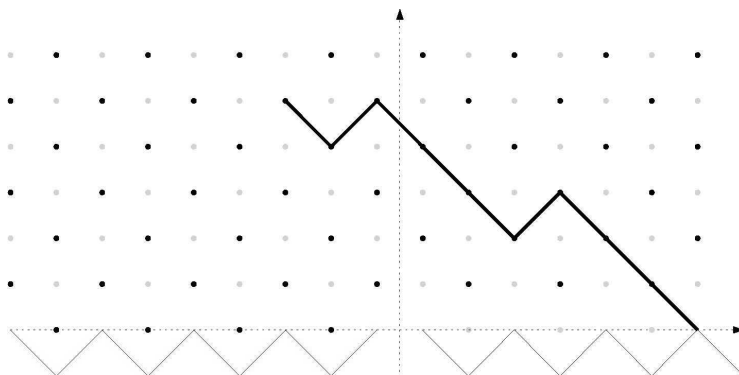


Figure 20 : Construction de la toile discrète, phase 3

⁵ Les points noirs (respectivement gris) sont sur les positions (x, y) telles que $x + y - 1/2$ est pair (respectivement impair).

Elle évolue ainsi sur le réseau noir. Prenons un autre point du réseau noir qui n'a pas été atteint par cette marche (n'importe lequel, cela n'a pas d'importance), et dessinons une autre marche aléatoire, indépendante de la première, qui prend fin aussitôt qu'elle touche quelque chose de déjà tracé.

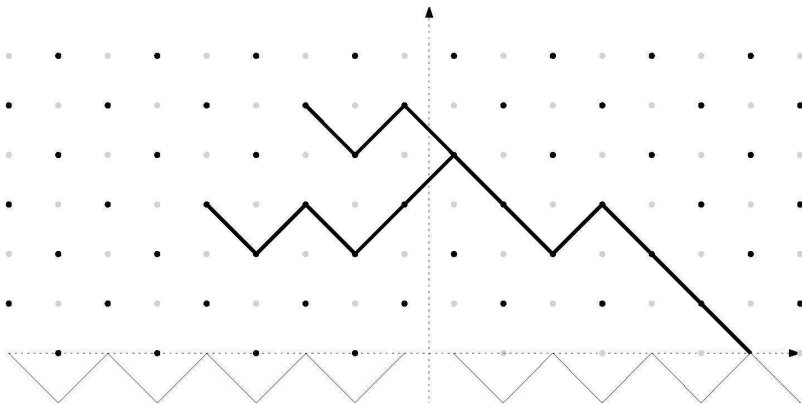
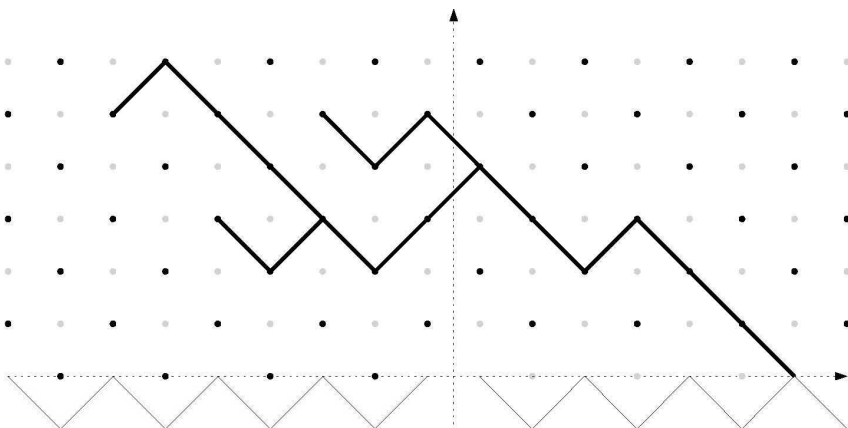


Figure 21 : Construction de la toile discrète, phase 4

On renouvelle l'exercice pour tous les points du réseau noir. Nous obtenons comme ci-dessous une structure de marches coalescentes dans le demi plan supérieur :



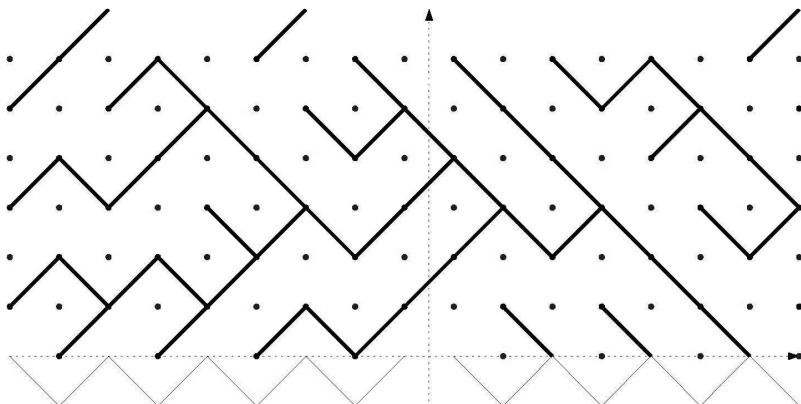


Figure 22 : Construction de la toile discrète, phases 5 et 6

Nous pouvons ensuite relier les points gris entre eux, de manière à ne pas croiser les courbes noires. La structure grise est une structure duale à la structure noire :

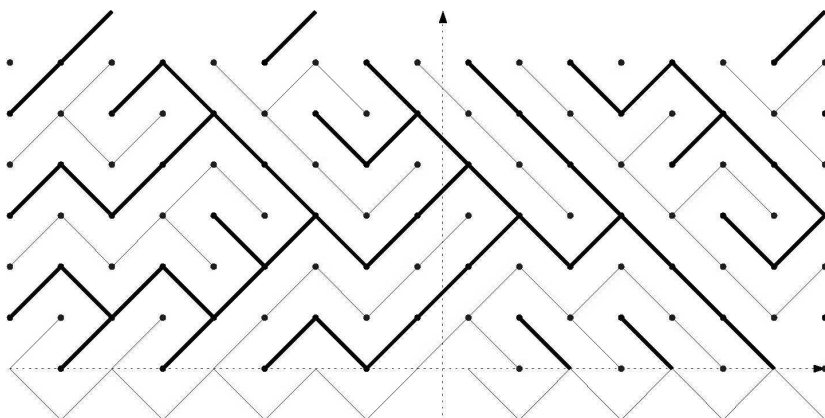


Figure 23 : Construction de la toile discrète, phase 7

Cela délimite une sorte de labyrinthe: on peut partir maintenant du point $(0,0)$ (flèche du bas en gras dans la figure ci-dessous) et commencer à faire le tour du dédale.

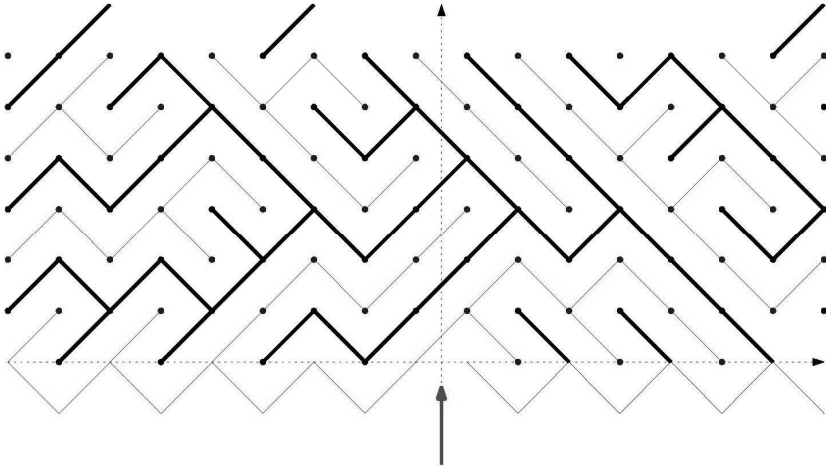


Figure 24 : Marche parcourant le labyrinthe, phase 1

Le début du tour dans le labyrinthe :

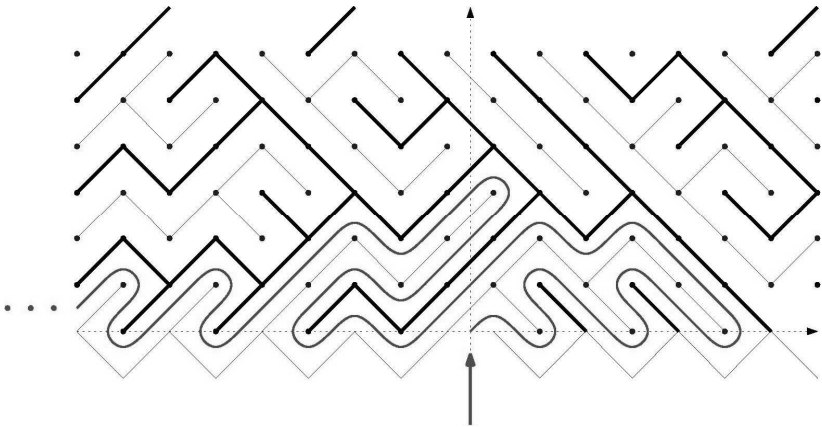


Figure 25 : Marche parcourant le labyrinthe, phase 2

Quel est donc le rapport avec la marche auto-réulsive ? Il se trouve que la marche qui parcourt le labyrinthe a la même loi que le marcheur (muni de sa hauteur H_n de telle sorte qu'il évolue bien dans le demi-plan supérieur) auto-réulsif du modèle auto-réulsif jouet.

La marche parcourant de labyrinthe a la même loi que (X_n, H_n) où X_n est la marche auto-réulsive et H_n représente sa hauteur (pour une illustration de ce

fait, on peut comparer les Figures 15 et 24 : on devine le début du labyrinthe en pointillé (Figure 15)

Les deux modèles sont donc en fait les mêmes ! Ce constat est central pour construire la loi limite du marcheur jouet.

Pour obtenir la limite du marcheur auto-répulsif jouet, on construit un analogue continu du labyrinthe discret. C'est possible car il est défini avec de marches aléatoires simples, dont on connaît bien la limite : c'est le mouvement brownien vu tout à l'heure. On remplace donc les marches aléatoires simples du labyrinthe par des mouvements browniens (cela n'est pas facile car des mouvements browniens partent de tous les points du demi-plan supérieur). Ensuite, ce labyrinthe continu est parcouru : c'est ce chemin qui correspond à la limite de notre marcheur-jouet. Nous appelons cette limite **le processus auto-répulsif**.

Notons que le même genre d'idée (regarder le contour d'arbres qui définissent des labyrinthes) a permis à Gregory Lawler, Oded Schramm et Wendelin Werner⁶ de construire la limite de l'arbre couvrant uniforme, un modèle de physique statistique très connu, et de prouver son invariance conforme.

3. Quelques propriétés du processus auto-répulsif

Que peut-on dire sur la limite des marches aléatoires auto-répulsives, le processus auto-répulsif ?

Qu'est-ce qu'un processus tout d'abord ? Un « processus » $(X_t)_{t \geq 0}$ est une fonction aléatoire continue qui associe à chaque temps t réel positif une position X_t .

Comment voir s'il est auto-répulsif ? Il n'y a plus de notion d'arêtes en effet, et on ne peut plus « compter » combien de temps on a passé à chaque endroit (on passe en fait un temps *infinitésimal* sur chaque position x !). Il est néanmoins possible pour certains processus de trouver une manière de mesurer le temps passé à chaque endroit, c'est ce qu'on appelle **le temps local** $L_t(x)$. Comme pour les

⁶ « Conformal Invariance of Planar Loop-Erased Random Walks and Uniform Spanning Trees », *Annals of Probability*, 32(1B) (2004), pp. 939-995.

marcheurs aléatoires vus ci-dessus, on peut considérer pour les processus qui admettent un temps local, le processus 1 + 1 dimensionnel :

$$(X_t, H_t) := (X_t, L_t(X_t)),$$

où pour chaque temps t , on regarde à la fois la position du processus X_t et le temps local H_t passé à cet endroit.

De façon heuristique, on va dire que $(X_t)_t$ est auto-répulsif lorsque $(X_t)_t$ a tendance à éviter les endroits les plus visités, c'est-à-dire les points $x \in \mathbb{R}$ où $L_t(x)$ est grand.

La Figure 26 représente une photographie de l'instant t , avec la position du processus (X_t, H_t) , et son temps local L_t .

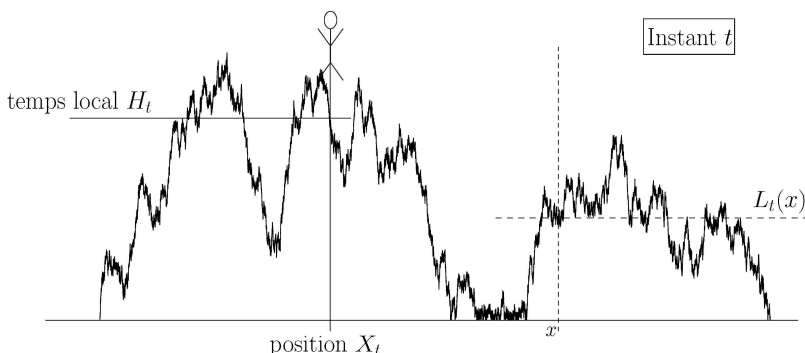


Figure 26 : Processus avec son temps local : photographie de l'instant t et son temps local $L_t(\cdot)$

Donnons deux premières propriétés remarquables du processus auto-répulsif : c'est un processus récurrent, c'est-à-dire qu'il passe une infinité de fois en chaque point réel.

Il admet une propriété de changement d'échelle, comme le mouvement brownien, mais pas avec le même exposant :

Pour tout $a > 0$, les processus $(X_{at}, t \geq 0)$ et $(a^{2/3}X_t, t \geq 0)$ ont la même loi (pour le mouvement brownien, rappelons que l'exposant était $a^{1/2}$).

4. Stratégie du fuyard

Revenons maintenant à la question initiale de la fuite le long d'une droite. Comment trouver une stratégie qui permette d'échapper au poursuivant ? La fonction $t \mapsto X_t$ représente la trajectoire du fuyard. Les poursuivants possèdent comme information le nombre de fois qu'il a passé à chaque endroit avant l'instant présent (grâce aux factures d'hôtel), mais pas les dates précises. Les poursuivants connaissent donc le temps local, c'est-à-dire à l'instant t la fonction $x \mapsto L(t, x)$. L'objectif est de trouver une trajectoire continue sur la droite réelle qui laisse le moins d'information possible sur son temps local.

Que se passe-t-il si l'on suit un processus auto-répulsif ? En d'autres termes, quelle est la loi conditionnelle de X_1 , la position du processus auto-répulsif à l'instant 1 sachant $L_1(\cdot)$, c'est-à-dire le temps qu'il a passé à chaque endroit ?

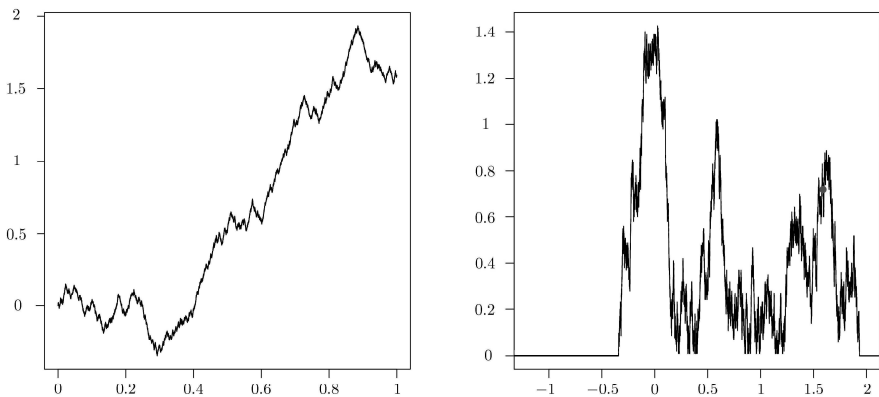


Figure 27 : Un voleur astucieux (auto-répulsif) : sur la gauche ($X_t, t \in [0, 1]$), et sur la droite le temps local $L_1(\cdot)$

Dans la figure ci-dessus, le graphique à gauche représente une trajectoire du processus auto-répulsif jusqu'au temps 1. Imaginons qu'au temps 1, on cherche à savoir où il se trouve. L'information disponible se trouve dans le graphique à droite : la courbe correspond au **temps local** au l'instant 1, c'est-à-dire le temps que le fuyard a passé à chacun des endroits avant $t = 1$.

En regardant ce temps local, on peut voir que ce processus laisse un peu d'information : il est forcément sur un point du support $[x_-, x_+]$ de $L_t(x)$ (où x_- est le point visité le plus à gauche, x_+ est le point visité le plus à droite) et il n'est pas complètement caché au milieu : il y a des points de stricte croissance (Figure 28) où le temps local est égal à 0 et où la trajectoire passe en fait qu'une seule fois.

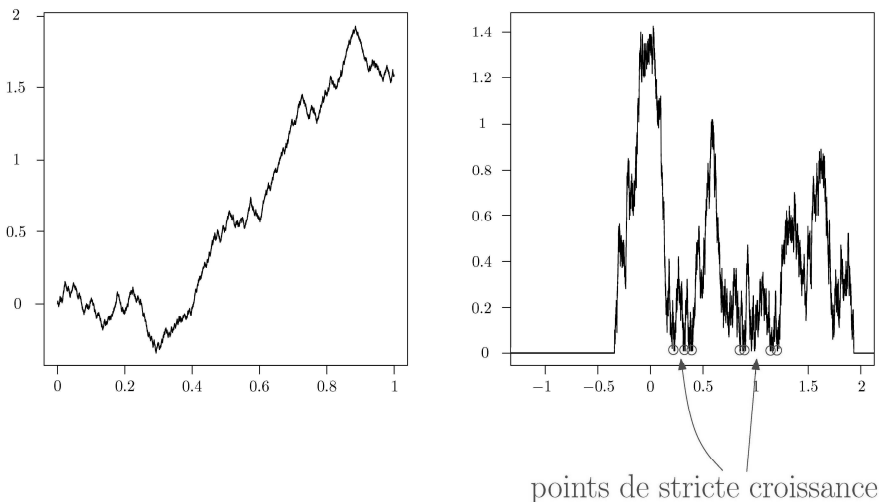


Figure 28 : La trajectoire à gauche, et le temps local à droite avec les points de stricte croissance.

Comme nous savons que le processus est parti de 0, nous pouvons déduire qu'il est forcément dans l'intervalle entre le dernier point de stricte croissance et le point le plus visité noté l (voir la figure 29). Pouvons-nous en savoir plus ? Il se trouve que non ! La loi de l'endroit où on se trouve X_1 est **uniforme sur l'intervalle l** . C'est l'objet du théorème de Laure Dumaz (2013)⁷, la loi de X_1 sachant $L_1(\cdot)$ est uniforme sur l'intervalle l ⁸.

⁷ « Marginal Densities of the 'True' Self-Repelling Motion », with B. Tóth, in *Stochastic Processes and their Applications*, 123(4), avril 2013, pp. 1454-1471.

⁸ Cet intervalle est l'excursion (une excursion est un intervalle maximal sur lequel le temps local est non nul) la plus éloignée de celle qui contient le point de départ (sur le dessin celle qui est la plus à droite).

Il est donc bien caché. Notons que l'intuition nous aurait plutôt indiqué que le processus avait plus de chance de se retrouver sur un endroit beaucoup visité, mais la propriété d'auto-répulsion dans notre cas contre ce phénomène.

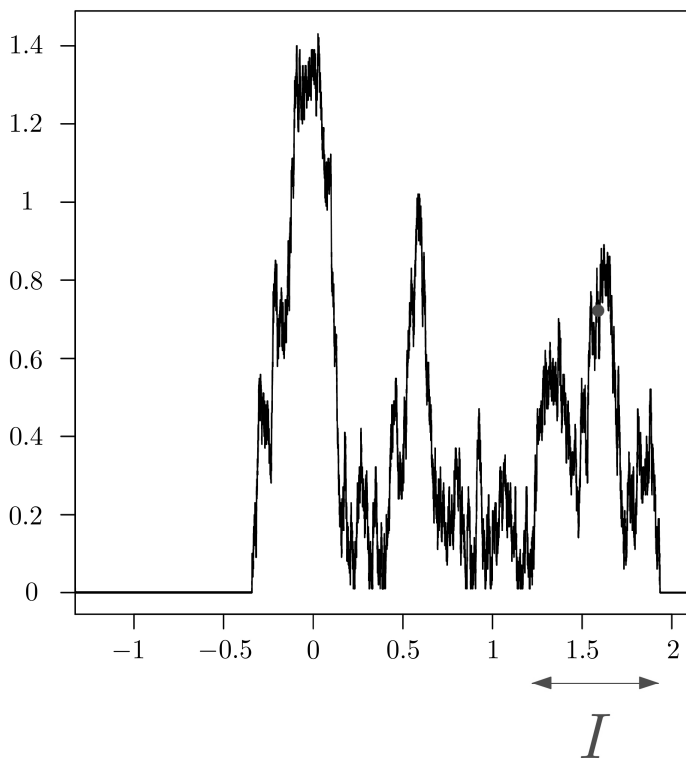


Figure 29 : Définition de l'intervalle I

Conclusion

Ce texte se conclut avec quelques questions ouvertes. La première porte sur le processus continu qui correspond à la limite d'échelle de la marche auto-répulsive et du modèle jouet. Il serait intéressant de prouver qu'il est universel, dans le même sens que le mouvement brownien est universel, c'est-à-dire qu'il correspond à la limite d'échelle d'une large classe de modèles discrets auto-répulsifs. Une autre question porte sur les applications possibles de ce processus auto-répulsif. Y a-t-il des modèles biologiques qui lui correspondent, ou en théorie des jeux pour maximiser une dérobade ?